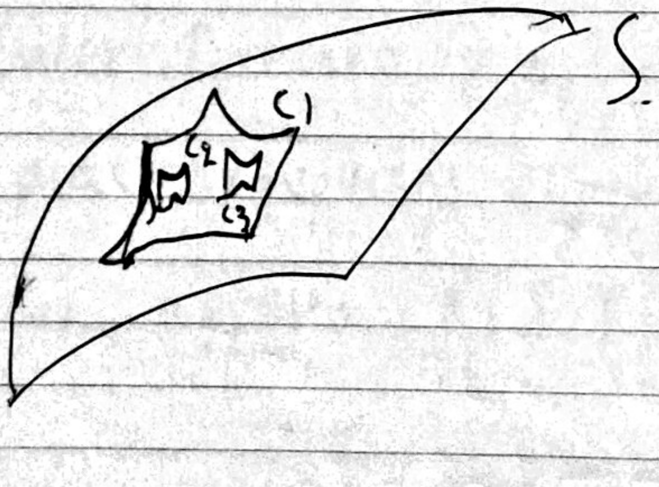
Τοπικό Θεώρημα Gauss-Bonnet

$X: U \to S$ ορθογώνιο σύστημα
σύστημα συντεταγμένων του
προσανατολισμού της S με
U ομοιομορφικό με κυκλικό
δίσκο του $\mathbb{R}^2$. Αν
$R \subseteq X(U)$ είναι απλή περιοχή
τότε $\iint_R K d\sigma + \int k_g(s) ds + \sum_{i=1} \theta_i$

θ_i: εξωτερικές γωνίες

Κανονικές περιοχές σε κανονικές
επιφάνειες

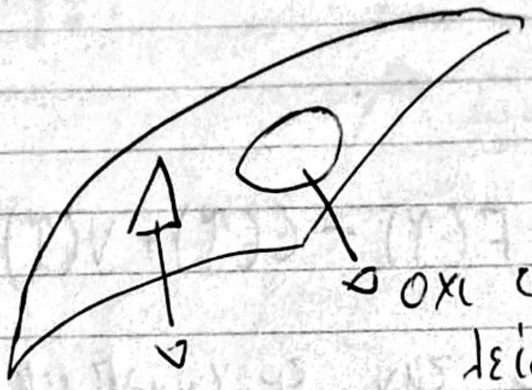


Ενα υποσύνολο $R \subseteq S$
καλείται κανονική
περιοχή αν είναι
συμπαγές με μη-κενό
εσωτερικό και σύνορο
∂R το οποίο είναι
εικόνα πεπερασμένου
πλήθους απλών κλειστών
κατά τμήματα κανονικών
καμπυλών που
ανά δύο δεν τέμνονται.

$\partial R = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

Παρατήρηση: Κάθε συμπαγής κανονική επιφάνεια είναι κανονική περιοχή

Τρίγωνα σε επιφάνεια: Είναι απλές περιοχές με 3 εξωτερικές γωνίες $\neq 0$

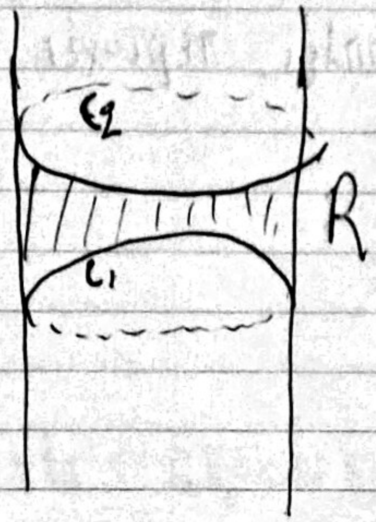


Τριγωνοποίηση κανονικής περιοχής

Τριγωνοποίηση T μιας κανονικής περιοχής R είναι ένα σύνολο $T = \{T_1, \dots T_k\}$ από τρίγωνα ώστε $\bigcup_{i=1}^{k} T_i = R$

και αν $T_i \cap T_j \neq \phi$ τότε $T_i \cap T_j$ ολόκληρη πλευρά ή κορυφή

Πρόταση: Για κάθε κανονική περιοχή υπάρχει μια τουλαχιστόν (άρα άπειρες) τριγωνοποίηση

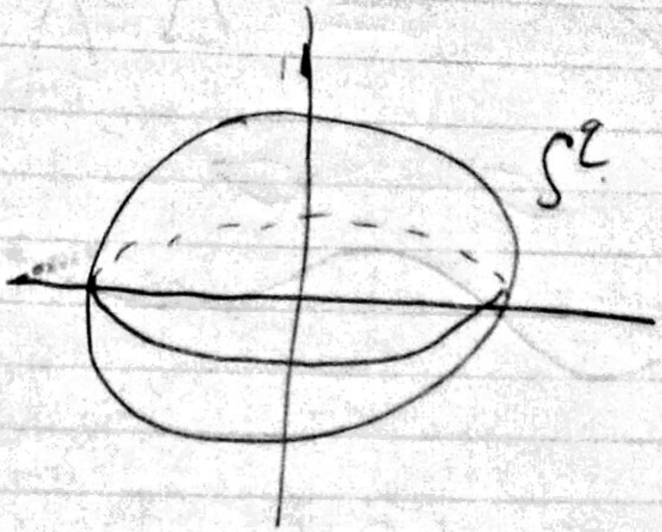
$S =$  $\partial R = C_1 \cup C_2$

Πρόταση: Ο αριθμος $F(\mathcal{T}) - E(\mathcal{T}) + V(\mathcal{T})$ δεν εξαρτάται από την τριγωνοποίηση της R και ονομάζεται χαρακτηριστική Euler - Poincare της περιοχής R

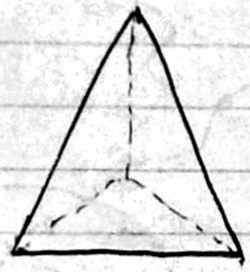
Συμβολίζεται με: $X(R)$

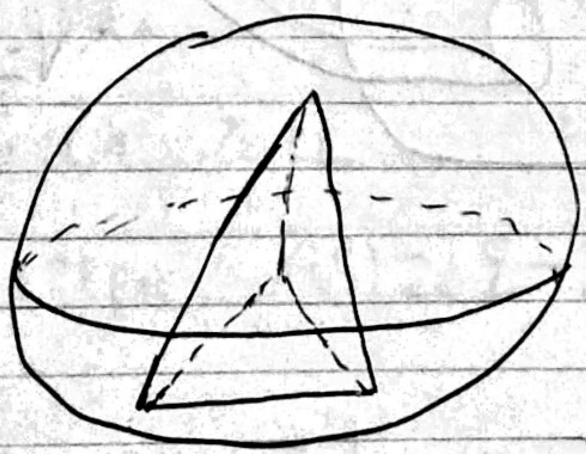
Άρα $X(R) = F(\mathcal{T}) - E(\mathcal{T}) + V(\mathcal{T})$

Πόρισμα – Παρατήρηση: κάθε επιφάνεια S έχει χαρακτηριστική Euler-Poincare



$X(S^2)=2$

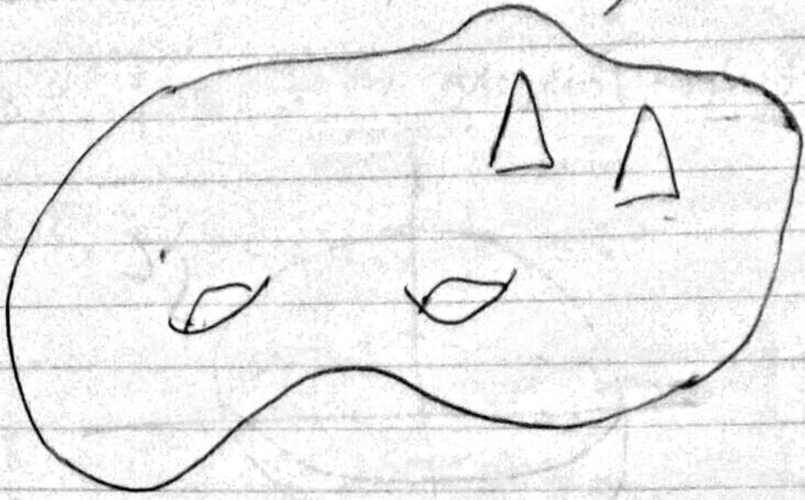




$F=4$
$E=6$
$V=4$

$X(S^2)=4+4-6=2$

S

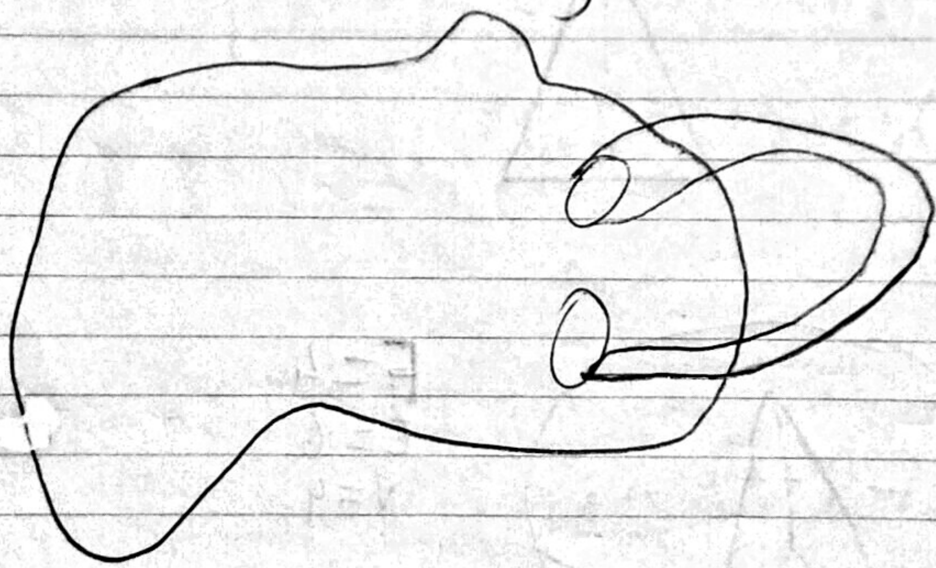


$F=2$

$E=6$

$V=6$

$\tilde{S}$



$\tilde{F}=F$

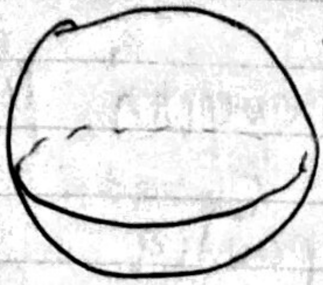
$\tilde{E}=E-2$

$V=V-4$

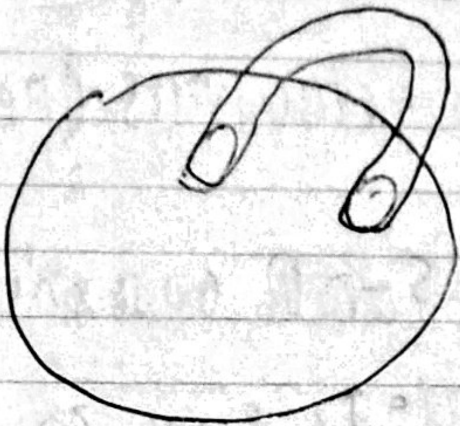
$$\chi(\tilde{S})=\tilde{F}-\tilde{E}+\tilde{V}=F-E+2+V-4=\chi(S)-2$$

Αρα $\chi(\tilde{S})=\chi(S)-2$

$\chi(\tilde{S}) = \chi(S) - 2g$ g: πλήθος χερουλιών



S^2 $\chi(S^2) = 2$



T^2 $\chi(T^2) = \chi(S^2) - 2$
$= 0$

Θεώρημα: Έστω S κανονική συμπαγής επιφάνεια τότε $\chi(S) = \{2, 0, -2, -4, -6 \ldots\}$

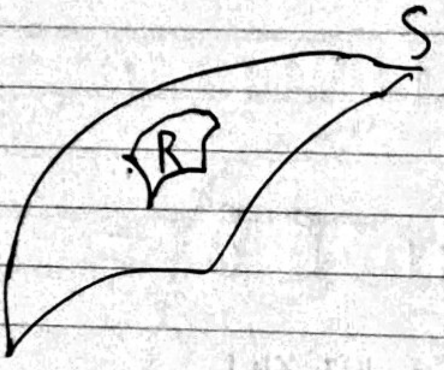
Ειδικότερα $\chi(S) = 2 - 2g(S)$, $g(S) =$ πλήθος χερουλιών

όπου ο αριθμός $g(S)$ καλείται γένος

2) Οι επιφάνειες S, S' είναι ομοιομορφικές $\iff \chi(S)=\chi(S') \iff g(S)=g(S')$

(3) Κάθε επιφάνεια είναι ομοιομορφική με S^2 στην οποία κολλάμε χερούλια

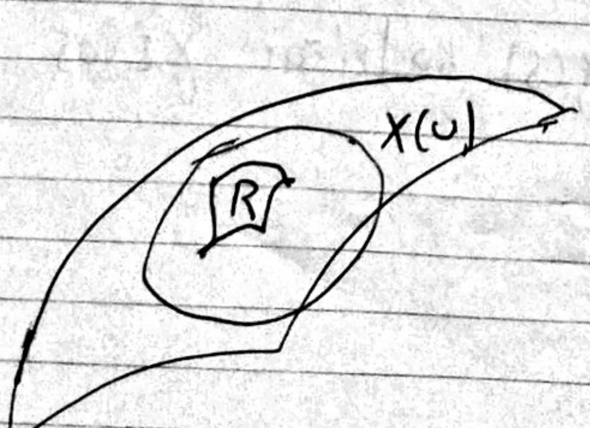
Ολοκλήρωση σε επιφάνειες (Προσανατολισμένες)



$f: R \subseteq S \to \mathbb{R}$ συνεχής

Ερώτημα: Τι είναι το $\iint_R f\,d\sigma$.

1η Περίπτωση: Το $R \subseteq X(U)$ όπου $X: U \to S$ σύστημα προσανατολισμού της S



Τότε $\iint_R f\,d\sigma$.

$$= \iint_{X^{-1}(R)} f\circ X \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

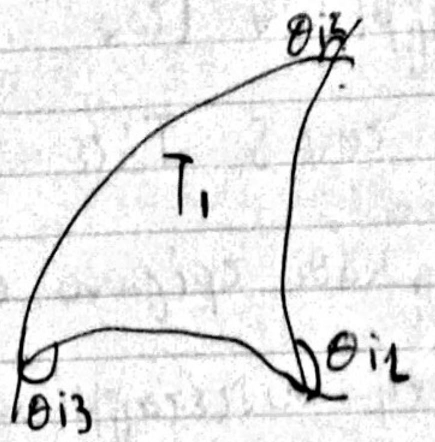
Πρόταση: Έστω $R \subseteq S^2$ κανονική περιοχή κανονικής επιφάνειας S και $X_a : U_a \to S$ οικογένεια συστημάτων συντεταγμένων (του προσανατολισμού) που καλύπτουν την S. Τότε υπάρχει τριγωνοποίηση ώστε κάθε τρίγωνο της να περιέχεται σε μια περιοχή συντεταγμένων.

Προς Ολικό Gauss-Bonnet

Έστω R κανονική περιοχή κανονικών επιφανειών της οποίας το ∂R είναι η ένωση των εικόνων απλών κλειστών κατά τμήματα συνεχών κανονικών καμπυλών

Έστω $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ τριγωνοποίηση ώστε κάθε τρίγωνο να περιέχεται σε περιοχή συντεταγμένων όπως στο τοπικό G-B

$$\Rightarrow \iint_{T_i} K\,d\sigma + \int_{\partial T_i} k_g(s)\,ds + \underbrace{\theta_{i1} + \theta_{i2} + \theta_{i3}}_{\text{εξωτερικές γωνίες}} = 2\pi$$



$$\Rightarrow \iint_R K\,d\sigma + \sum_i \int_{C_i} k_g + \sum_i (\theta_{i1}+\theta_{i2}+\theta_{i3}) = 2\pi F$$

$$\sum_i (\theta_{i1}+\theta_{i2}+\theta_{i3}) \xrightarrow{\varphi_{i1}=\pi-\theta_{i1}} \sum_i (\pi-\varphi_{i1}+\pi-\varphi_{i2}+\pi-\varphi_{i3})$$

$$= 3\pi F - \sum_i \underbrace{(\varphi_{i1}-\varphi_{i2}-\varphi_{i3})}_{\text{εσωτερικές γωνίες } T_i} \quad (*)$$

$V = V_i + V_c \longrightarrow$ πλήθος κορυφών στο σύνορο.

V_i: πλήθος εσωτερικών κορυφών

$$(*) \Rightarrow 3\pi F - 2\pi V_i - \sum_{\substack{\text{αθροίζω}\\ \text{σε εξωτερικές}\\ \text{κορυφές}}} (\varphi_{i1}+\varphi_{i2}+\varphi_{i3})$$

$$= 3\pi F - 2\pi V_i - \pi V_{CT} - \sum (\pi - \theta_i)$$

$= 3\pi F - 2\pi V_i - \pi V_{iT} - \pi V_{ex} + \sum_i \theta_i$

$= 3\pi F - 2\pi V_i - \pi V_{ex} + \sum_i \theta_i$

Κάθε T_i έχει 3 πλευρές, όλα μαζί έχουν $3F$ πλευρές

$E = E_i + E_{ex}$ → πλήθος εξωτερικών

E_i: πλήθος εσωτερικών

$3F = 2E_i + E_{ex}$

Άρα $\sum_i (\theta_{i1} + \theta_{i2} + \theta_{i3}) = (2E_i + \cancel{E_{ex}})\pi - 2\pi V_i - \pi \cancel{V_{ex}} + \sum_i \theta_i$

$= 2\pi E_i - 2\pi V_i + \sum_i \theta_i \Rightarrow$

$= 2\pi (E_i + E_{ex}) - 2\pi E_{ex} - 2\pi V_i + \sum_i \theta_i$

$= 2\pi E - 2\pi V + \sum_i \theta_i$

Τότε $\iint_R K \, d\sigma + \sum_i \int_{C_i} k_g(s) \, ds + \sum_j \theta_j = 2\pi \cdot (F - E + V)$

Άρα Ολικό Θεώρημα G-B

$$\iint_R K\, d\sigma + \sum \int_{C_i} k_g(s)\, ds + \sum_j \theta_j = 2\pi \chi(R)$$

Αν S συμπαγής κανονική επιφάνεια τότε ισχύει $\iint_S K\, d\sigma = 2\pi \chi(S)$